УДК 004.02

Г.В. Білик, І.С. Грунський, Н.В. Ногіна
ДВНЗ «Донецький національний технічний університет», Україна
Україна, 83050, м. Донецьк, пр. Б. Хмельницького, 84

Побудова найкоротших шляхів у дворівневому графі

A.V. Bilyk, I.S. Grunsky, N.V. Nogina
Donetsk National Technical University, Ukraine
Ukraine, 83050, c. Donetsk, B. Khmelnitsky ave., 84

A finding Shortest Paths in a Two-level Graph

А.В. Билык, И.С. Грунский, Н.В. Ногина
ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет, Украина
Украина, 83050, г. Донецк, пр. Б. Хмельницкого, 84

Построение кратчайших путей в двухуровневом графе

Запропоновано новий метод пошуку найкоротших шляхів у дворівневому графі з поміченими вершинами і дугами. Він дозволяє знаходити один або декілька оптимальних шляхів між заданими вершинами, помітки та якість цих шляхів. Метод орієнтований на дворівневий граф, де кожна вершина графа першого рівня є графом другого рівня. Метод заснований на локальній редукції графа, тобто на послідовному виключені його вершин та дуг.
Ключові слова: метод побудови найкоротших шляхів, дворівневий граф, локальна редукція графа.

New method for finding shortest paths in two-level graphs with labeled vertices and edges is proposed. It enables to find one or several optimal paths between given vertices as well as labels and quality of these paths. Method is oriented on two-level graphs where each vertex of a first-level graph in a second-level graph. The method is based on the local reduction of a graph, that is, on a successive elimination of its vertices and edges.
Key words: method for finding shortest paths, two-level graph, local reduction of a graph.

Предлагается новый метод поиска кратчайших путей в двухуровневом графе с помеченными вершинами и дугами. Он позволяет находить один или несколько оптимальных путей между заданными вершинами, пометки и качество этих путей. Метод ориентирован на двухуровневый граф, где каждая вершина графа первого уровня является графом второго уровня. Метод основан на локальной редукции графа, то есть на последовательном исключении его вершин и дуг.
Ключевые слова: метод построения кратчайших путей, двухуровневый граф, локальная редукция графа.

Вступ

Проблема пошуку найкоротших шляхів у графі є загально відомою та важливою для різних застосувань, зокрема при вирішенні соціальних проблем [1] та проблем штучного інтелекту [2]. Існує ряд алгоритмів для вирішення цієї задачі [3], [4]. В останній час ця проблема інтенсивно вивчається для графів складної багаторівневої структури (наприклад, [5]). Оскільки ця проблема має широкий спектр застосувань і тим самим багато варіантів відмічених графів, вона ще не має повного розв’язання і тому є дуже актуальною.

У даній роботі розглядається задача пошуку найкоротших шляхів у поміченому дворівневому графі від початкової вершини до деякої фінальної, де основна увага приділяється розмежуванню пошуку шляхів на першому та другому рівнях.

Метою даної роботи є розробка методу пошуку найкоротших шляхів у дворівневому графі з поміченими вершинами і дугами, який дозволяв би знаходити один або декілька оптимальних шляхів між заданими вершинами, помітки та якість цих шляхів.

Метод засновано на локальній редукції графа [6], [7], тобто на послідовному виключені його вершин та дуг.

Основні поняття та позначення

Розглядаються зв'язні орграфи [3] зі скінченими множинами вершин Q і дуг E, що не мають петель.

Дуга – це є пара вершин (q_i, q_l). Дуги графа G відмічено мітками з множини Y, виділено початкову вершину та множину фінальних вершин. Таким чином, $G=(Q, E, Y, \rho, q_0, F)$, де:

Q – скінченна множина вершин графа G;

E – множина дуг графа G;

Y – множина поміток дуг графа G;

$\rho: E \rightarrow Y$ – функція розмітки дуг графа G;

q_0 – початкова вершина графа G;

F – множина фінальних вершин графа G.

Кожній вершині q_i графа G поставимо у відповідність число $Z(q_i)$ – якість цієї вершини.

Нехай $Pre(q_i)$ – множина початкових вершин усіх дуг, які входять в q_i , а $Post(q_i$ – множина кінцевих вершин усіх дуг, які виходять з q_i.

Початковим інцидентором (точкою дотику) дуги (q_i, q_j) до вершини q_i назвемо трійку $(q_i, (q_i, q_j))$.

Кінцевим інцидентором дуги (q_i, q_j) до вершини q_j назвемо трійку $((q_i, q_j), q_j)$.

Граф G будемо називати графом першого рівня.

Кожна вершина $q_i \in Q$ графа G є графом G_i – графом другого рівня без петель і кратних дуг, в якому вершини і дуги відмічено мітками з множин M_i і P_i відповідно. Так, $G_i =(T_i, D_i, M_i, P_i, \mu , \tau, T_{0i}, F_i)$, де:

$T_i = \{t_{ij}\}$ – скінченна множина вершин графа G_i;

$D_i \subseteq T_i \times T_i$ – множина дуг графа G_i;

M_i – множина поміток вершин графа G_i;

P_i – множина поміток дуг графа G_i;

μ: $T_i \rightarrow M_i$ – ін'єктивна функція розмітки вершин графа G_i;

τ: $D_i \rightarrow P_i$ – функція розмітки дуг графа G_i;

T_{0i} – множина початкових вершин графа G_i;

F_i – множина фінальних вершин графа G_i.

Вершина графа G_i має наступний вигляд: t_{ij}, де i – номер вершини q_i графа G, а j – номер вершини t_{ij} в множині T_i.

Будемо вважати, що дуга (q_i, q_l) з'єднує унікальну пару вершин $t_{ij} \in T_i$ та $t_{lk} \in T_l$, тобто вершини t_{ij} та t_{lk} фактично є початковим і кінцевим інциденторами дуги (q_i, q_l) до вершин q_i та q_l. Дуга графа G_i – це є пара вершин (t_{ij}, t_{lk}).

Передбачається, що помітки дуг графів G та G_i – позитивні дійсні числа.

Шляхом у графі G назвемо скінченну послідовність $p = q_1 e_1 q_2 e_2 \ldots e_{k-1} q_k$, де $q_k \in Q$, а e_i – дуга, початком якої є вершина q_i, а кінцем – q_{i+1}.

Шляхом розмірністю *2* у графі G є такий шлях $p = q_{i-1} e_{i-1} q_i e_i q_{i+1}$.

Шляхом у графі G_i. назвемо скінченну послідовність $s_n = t_{i1} d_1 t_{i2} d_2 \ldots d_{i-1} t_{ik}$, де $t_{ij} \in T_i$, а d_i – дуга, початком якої є вершина t_{ij}, а кінцем – t_{ij+1}.

Відмітка шляху s – це послідовність відміток $w(s)=m_1 p_1 m_2 p_2 \ldots p_{k-1} m_k$, де $m_i= \mu(T_i), p_i = \tau (d_i)$.

Шляхом розмірністю *2* у графі G_i є такий шлях $s = t_{i,j-1} d_{j-1} t_{ij} d_i t_{i,j+1}$.

Шляхом між вершинами q_i та q_j буде шлях між вершинами t_{in} та t_{jm}, який назвемо послідовністю $g_n= t_{1i} x_1 t_{2j} x_2 \ldots x_{k-1} t_{kn}$, де $t_{ij} \in T_i$, а x_i може бути дугою e_i графа G або дугою d_i графа G_i.

Відмітка шляху g – це послідовність відміток $w(g)=a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots b_{k-1} a_k$, де $a_i= = \mu(T_i), b_i = \rho(e_i)$ або $b_i = \tau (d_i)$.

Якість шляху g визначимо за наступною формулою (1):

$$QPath(g)=\sum_{i=0}^{k} Z(q_i)+\sum_{i=0}^{k} b_i, \qquad (1)$$

де вершину q_i визначаємо за індексом i вершини t_{ij} у послідовності g.

Вагою шляху s назвемо величину (2):

$$dis(\mathrm{s})=\sum_{i=0}^{k-1} p_i. \qquad (2)$$

На множині поміток шляхів у графах G_i введемо операцію злиття: нехай $w(s_1)=m_1 p_1 \ldots p_{i-1} m_i$ та $w(s_2)=m_1' p_1' \ldots p_{j-1}' m_j'$ – дві помітки шляхів. Тоді

$$w(s_1) \bullet w(s_2) = m_1 p_1 \ldots p_{i-1} m_i p_1' \ldots p_{j-1}' m_j', \qquad (3)$$

якщо $m_i = m_1'$.

На множині поміток шляхів у графі G введемо 2 операції.

1. Операція злиття: нехай $w(g_1)=a_1 b_1 \ldots b_{i-1} a_i$, $w(s_1)=m_1 p_1 \ldots p_{j-1} m_j$ та $w(g_2)=a_1' b_1' \ldots b_{k-1}' a_k'$ – три помітки шляхів. Тоді

$$w(g_1)\bullet w(s_1)\bullet w(g_2)=\begin{cases} a_1 b_1 \ldots b_{i-1} a_i p_1 \ldots p_{j-1} m_j b_1' \ldots b_{k-1}' a_k', & \text{якщо } a_i = m_1 \text{ і } m_j = a_1 \\ \infty, & \text{інакше.} \end{cases} \qquad (4)$$

2. Операція об’єднання: $w(g_n) \cup w(g_k) = \{w(g_n); w(g_k)\}$.

Кратними дугами у графі G назвемо такі дуги, які на графі другого рівня виходять з однієї вершини і входять в одну й ту саму вершину.

Постановка задачі. У роботі вирішується наступна задача. Даний скінчений неорієнтований зв’язний помічений дворівневий граф. Потрібно розробити метод побудови найкоротших шляхів та поміток цих шляхів у даному графі.

Метод побудови найкоротших шляхів у дворівневому графі

Вхідні дані. Помічений зв’язний дворівневий граф G з початковою і множиною фінальних вершин.

Вихідні дані. Один або декілька найкоротших шляхів, поміток та якість цих шляхів між заданими вершинами.

Крок 0. **If** $q_0 \in F$ **then** для пари вершин $t_{0n} \in T_{0i}$ та $t_{0m} \in F_i$ працює Процедура 1 (наведена нижче), результатом якої буде оптимальний шлях у графі G_0 між вершинами t_{0n} та t_{0m} і його помітка, **else go to** *Крок 1.*

Крок 1. Підготовка графа *G*.

Кожне ребро між парою вершин q_i та q_j графа *G* замінюється двома дугами: (q_i,q_j) та (q_j,q_i). Створюємо представлення графа *G* у вигляді списку дуг з їх відмітками, при цьому відмітки відповідних вершин графів G_i. переносяться на дуги графа *G*, тобто помітка дуги матиме вигляд трійки $(\mu\ (t_{in}),\ \rho\ (e_i),\ \mu\ (t_{jm}))$ **go to** *Крок 1.1.*

Крок 1.1. Введення початкової та фінальної вершин.

До списку вершин *Q* вводиться фіктивна початкова вершина *beg*. До списку дуг *E* додається дуга $e_i = (beg,\ q_0)$. Кінцевим інцидентором дуги e_i до вершини q_0 буде вершина $t_{0n} \in T_{0i}$. Помітка дуги $\rho(e_i)= \mu\ (t_{0n})$.

До списку вершин *F* вводимо фіктивну фінальну вершину *fin*. До списку дуг *E* додається дуга $e_j = (q_i,\ fin)$ з кожної фінальної вершини q_i у вершину *fin*. Початковим інцидентором дуги e_j до вершини q_i буде вершина $t_{in} \in F_i$. Помітка дуги $\rho(e_j)= \mu\ (t_{in})$ **go to** *Крок 2.*

Крок 2. **If** в графі *G* існує хоч одна вершина $q_i \neq beg$, $q_i \neq fin$, із якої виходить хоч одна дуга у *fin*, **then** $Pre(fin):= Pre(fin) \cup q_i$ **go to** *Крок 3;*

else If в графі *G* існує хоч одна вершина $q_i \neq beg$, $q_i \neq fin$, з якої не виходить хоч одна дуга у *fin,* **then go to** *Крок 8;*

else go to *Крок 9.*

Крок 3. **If** існує хоч одна вершина $q_i \in Pre(fin)$, обираємо її та всі вхідні та вихідні з неї дуги **then go to** *Крок 4;*

else go to *Крок 2.*

Крок 4. Пошук шляхів для такої вершини q_i.

Крок 4.1. **If** у графі *G* існує один або декілька шляхів p_n розмірністю *2* наступного вигляду: $p_n = q_{i-1}e_{i-1}\ q_i\ e_iq_{i+1}$, де $q_{i-1} \in Pre(q_i)$, а $q_{i+1} \in Post(q_i)$, **then go to** *Крок 4.2;*

else go to *Крок 8.*

Крок 4.2. Для кожного знайденого шляху p_n до списку дуг *E* додається дуга $e_j =$ $= (q_{i-1},\ q_{i+1})$. На рівні дворівневого графа початковою вершиною такої дуги e_j буде початковий інцидентор дуги e_{i-1} до вершини q_{i-1}, а фінальною – кінцевий інцидентор дуги e_i до вершини q_{i+1} **go to** *Крок 4.3.*

Крок 4.3. Для кожного знайденого шляху p_n існує пара вершин другого рівня t_{in}, t_{im} – кінцевий та початковий інцидентори дуг e_{i-1} та e_i до вершини q_i відповідно.

Нехай t_{in}, t_{im} – початкова та фінальна вершини графа G_i. **go to** *Крок 5.*

Крок 5. Пошук оптимального шляху та його помітки у графі G_i.

If $t_{in} = t_{im}$, **then** $s = t_{in}$, а $w(s_n) = \mu\ (t_{in})$ **go to** *Крок 7.*

else go to *Крок 5.1.*

Крок 5.1. Для кожної пари вершин $(t_{in},\ t_{im})$ знаходимо у графі G_i оптимальний шлях *s* та його помітку *w(s)* за Процедурою 1 (описана нижче) **go to** *Крок 6.*

Крок 6. **If** для пари вершин $(t_{in},\ t_{im})$ шлях *s* існує, **then go to** *Крок 7*,

else помітка нової дуги e_j помічається символом «∞» **go to** *Крок 8.*

Крок 7. Формування поміток нових дуг.

Помітка кожної нової дуги e_j формується з поміток двох дуг e_{i-1}, e_i та помітки відповідного шляху *s* між вершинами t_{in}, t_{im} і має вигляд: $\rho(e_j)= w(g_{i-1}) \bullet w(s_n) \bullet w(g_i)$ (див. (4)) **go to** *Крок 8.*

Крок 8. Вилучається вершина q_i та всі вхідні і вихідні з неї дуги.

Вилучаються всі дуги, які мають помітку «∞».

Вилучаються ті петлі, початок і кінець яких на рівні дворівневого графа співпадає.

Обчислюється якість шляху *QPath* (1) для усіх дуг графа *G*.

Вилучаються всі кратні дуги, окрім однієї, з найменшим значенням *QPath.*

If декілька кратних дуг мають однакове значення *QPath,* **then** вилучення цих дуг не відбувається.

Множина $Pre(fin):= Pre(fin) - q_i$ **go to** *Крок 2.*

Крок 9. Видаляємо всі вершини $q_i \neq beg$, $q_i \neq fin$. В результаті одержуємо граф, що складається лише з двох вершин: *beg* та *fin,* сполучених однією або декількома дугами з різними помітками шляхів. Результатом буде одна помітка або декілька об'єднаних оператором *«∪»* поміток шляхів та якість цих шляхів.

If *beg* та *fin* не сполучені ні однією дугою, **then** повідомлення про те, що шлях та його помітку для заданих вершин графа знайти не можливо.

Процедура 1

Метод. Пересування по графу G_i від вершини *fin* до початкової, при цьому будується множина *Pre(fin)*, з якої почергово вилучаються вершини. Надалі формуються нові дуги в *fin* через вершину з *Pre(fin)*, які відповідають шляху розмірності *2*. На нових дугах формуються відмітки цих шляхів. Серед усіх сформованих шляхів обирається найкоротший по значенню *dis.*

Процедура 1.

Вхідні дані. Помічений граф G_i без петель та кратних дуг з початковою та фінальною вершинами.

Вихідні дані. Помітка найкоротшого по вазі шляху.

Крок 0. Кожне ребро між парою вершин t_{in} та t_{im} графа G_i замінюється двома дугами: (t_{in}, t_{im}) та (t_{im}, t_{in}). Створюємо представлення графа G_i у вигляді списку дуг з їх відмітками, при цьому відмітки вершин переносяться на дуги графа G_i, тобто поміткою кожної дуги d_i буде трійка: $\mu(t_{in}), \tau(d_i), \mu(t_{im})$, яку фактично можна вважати поміткою шляху $w(s)$.

Крок 1. **If** $t_{0j} \in F_i$, то поміткою найкоротшого шляху у графі будемо вважати $\mu(t_{0j})$;

else go to *Крок 2.*

Крок 2. У список вершин T_i вводиться фіктивна фінальна вершина *fin*.

У список дуг D_i додається дуга (t_{ij}, fin) з кожної фінальної вершини t_{ij} у вершину *fin* та $\tau(t_{ij}, fin) = \mu(t_{ij})$, множина $Pre(fin):=\varnothing$.

Крок 3. **If** у графі існує хоч одна вершина $t_{ij} \notin T_{0i}$, $t_{ij} \neq fin$, з якої виходить хоч одна дуга у *fin*, **then** для всіх таких вершин $Pre(fin):= Pre(fin) \cup t_{ij}$ **go to** *Крок 4;*

else if в графі G_i існує хоч одна вершина $t_{ij} \notin T_{0i}$, $t_{ij} \neq fin$ з якої не виходить дуги у *fin,* **then go to** *Крок 8.*

else go to *Крок 8.*

Крок 4. **If** у графі існує хоч одна $t_{ij} \in Pre(fin)$ **then go to** *Крок 5*;

else go to *Крок 3.*

Крок 5. Вибираємо таку t_{ij} та всі вхідні/вихідні з неї дуги.

If при цьому існує один або декілька шляхів s_n, розмірністю *2*, наступного вигляду: $s = t_{i,j-1}\, d_{j-1}\, t_{ij}\, d_i\, t_{i,j+1}$, де $t_{i,j-1} \in Pre(t_{ij})$, а $t_{i,j+1} \in Post(t_{ij})$, **then go to** *Крок 6*, **else go to** *Крок 7.*

Крок 6. Для кожного такого шляху s_n у список дуг D_i додається дуга $d_k = (t_{i,j-1}, t_{i,j+1})$ з відміткою, отриманою за допомогою об'єднання поміток дуг d_{j-1} та d_j, і яка матиме вигляд: $\tau(d_k) = w(s_k) = w(s_{j-1}) \bullet w(s_j)$ (3).

Вага кожної нової дуги d_k розраховується наступним чином: $dis(d_k)= dis(d_{j-1})+ dis(d_j)$ (2); **go to** *Крок 7.*

Крок 7. Вилучаємо вершину t_{ij} та всі вхідні та вихідні з неї дуги. Вилучаємо усі кратні дуги у графі G_i, окрім будь-якої однієї. Вилучаємо усі петлі. Множина $Pre(fin):= Pre(fin) - t_{ij}$; **go to** *Крок 4.*

Крок 8. Вилучаємо всі вершини $t_{ij} \notin T_{0i}$, $t_{ij} \neq fin$ та всі вхідні та вихідні з них дуги.

Отримаємо граф, що складається лише з двох вершин: $t_{ij} \in T_{0i}$ та fin, сполучених однією дугою з мінімальною вагою dis (2), з відміткою найкоротшого шляху у графі.

If $t_{ij} \in T_{0i}$ та fin не сполучені жодною дугою, **then** повідомлення про те, що шляху та його помітки для заданих вершин графа не існує.

Процедура 1 є узагальненням раніше розробленого алгоритму [7].

Особливості методу побудови найкоротших шляхів у дворівневому графі

Проведені вище міркування показують, що метод пошуку найкоротших шляхів у дворівневому графі між заданою початковою та будь-якою з фінальних вершин завжди для усіх графів G має два результати:

1) будь-якого шляху та його помітки для заданих вершин не існує;
2) один або декілька найкоротших шляхів та їх поміток для заданих вершин.

Запропонований метод має ряд особливостей.

1. Метод працює з дворівневим поміченим графом G.
2. Помітки вершин графів другого рівня переносяться на дуги графа першого рівня.
3. Для пошуку найкоротшого шляху та його помітки у графах другого рівня використовується Процедура 1.
4. Для кожного шляху у графі G розраховується його якість (1).

Для побудови поміток шляхів введені нові операції на множині поміток шляхів (3), (4).

Висновки

Запропоновано новий метод пошуку найкоротших шляхів у неорієнтованому графі з поміченими вершинами і дугами, який працює з дворівневим графом G без необхідності приводити його до стандартного вигляду однорівневого графа. При цьому використовується метод локальної редукції графа [6] та Процедура 1 для кожного графа другого рівня.

В результаті застосування запропонованого методу отримуємо один або декілька оптимальних шляхів, помітки та якість цих шляхів у графі G, або повідомлення про те, що будь-якого шляху та його помітки між заданими вершинами не існує.

Легко бачити, що у випадку, коли всі графи G_i мають по одній вершині, розроблений метод співпадає з раніше розробленим алгоритмом пошуку найкоротшого

шляху у поміченому графі методом локальної редукції графа [7]. Таким чином, запропонований метод є суттєвим узагальненням результатів [7-9]. Узагальнення полягає у наступному.

1. Кожна вершина графа G є графом G_i.

2. Проводиться обчислення якості шляху з урахуванням ваги помітки кожної вершини у цьому шляху та помітки ваги кожного ребра у той час, як у [7] виконується тільки обчислення ваги позначок ребер у шляху.

3. Введено нові операції на множині поміток шляхів.

4. Використовується Процедура 1 для графів G_i.

Список літератури

1. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным биологическим и экологическим задачам / Ф.С. Робертс ; [ред. А.И. Тейман; пер. с англ. А.М. Раппопорта, С.И. Травкина]. – М. : Наука, 1986. – 496 с.
2. Droste M. Handbook of Weighted Automata / M. Droste, W. Kurich, H. Vogler. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2009 – 610 p.
3. Кристофидес Н. Теория графов: алгоритмический подход / Кристофидес Н. – М. : Мир, 1978. – 430 с.
4. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. – М. : Мир, 1979. – 536 с.
5. Батищев Д.И. Многоуровневая декомпозиция гиперграфовых структур / Д.И. Батищев, Н.В. Старостин, А.В. Филимонов // Прилож. к журналу «Информационные технологии». – 2008. – № 5(141). – М. : Новые технологии. – 32 с.
6. Ногина Н.В. Синтез регулярного выражения языка, порожденного помеченным графом, методом его локальной редукции / Н.В. Ногина, И.С. Грунский // Искусственный интеллект. – 2012. – №3. – С. 348-353.
7. Ногина Н.В. Построение кратчайшего пути в помеченном графе при помощи локальной редукции графа / Н.В. Ногина, А.В. Билык // Сучасна інформаційна Україна: інформатика, економіка, філософія : матеріали доповідей конференції, 26 квітня 2012 року. – Донецьк, 2012. – 316 с. – С. 76-79.
8. Білик Г.В. Метод побудови найкоротших шляхів у дворівневому графі / Г.В. Білик, І.С. Грунський, Н.В. Ногіна // Інформаційні управляючі системи та комп'ютерний моніторинг (ІУС КМ – 2013) : IV Всеукраїнська науково-технічна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених, 24 – 25 квітня 2013 р., м. Донецьк : зб. доп. : в 2 тт. / Донец. націонал. техн. ун-т ; редкол. В.А. Світлична. – Донецьк : ДонНТУ, 2013. – Т. 1. – 765 с. – С. 474–478.
9. Білик Г.В. Пошук найкоротших шляхів в графі дворівневої структури / Г.В. Білик, І.С. Грунський, Н.В. Ногіна // Інтелектуальні системи в промисловості і освіті : тези доповідей Четвертої міжнародної науково-практичної конференції. – Суми : Вид-во СумДУ, 2013. – (у друці).

References

1. Roberts F.S. Diskretnyie matematicheskie modeli s prilozheniyami k sotsialnyim biologicheskim i ekologicheskim zadacham / F.S. Roberts ; red. A.I. Teyman; per. s angl. A.M. Rappoport, S.I. Travkin. – M. : Nauka, 1986. – 496 p.
2. Droste M. Handbook of Weighted Automata / M. Droste, W. Kurich, H. Vogler. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2009 – 610 p.
3. Kristofides N. Teoriya grafov: algoritmicheskiy podhod / N. Kristofides. – M. : Mir, 1978. –– 430 p.
4. Aho A. Postroenie i analiz vyichislitelnyih algoritmov / A. Aho, Dzh. Hopkroft, Dzh. Ulman. – M. : Mir, 1979. – 536 s.
5. Batischev D.I. Mnogourovnevaya dekompozitsiya gipergrafovyih struktur / D.I. Batischev, N.V. Starostin, A.V. Filimonov // Prilozh. k zhurnalu «Informatsionnyie tehnologii». – № 5(141). – M. : Novyie tehnologii. – 2008. – 32 s.
6. Nogina N.V. Sintez regulyarnogo vyirazheniya yazyika, porozhdennogo pomechennyim grafom, metodom ego lokalnoy reduktsii / N.V. Nogina, I.S. Grunsky // Iskusstvennyiy intellekt. – 2012. – №3. – S. 348-353.
7. Nogina N.V. Postroenie kratchayshego puti v pomechennom grafe pri pomoschi lokalnoy reduktsii grafa / N.V. Nogina, A.V. Bilyk // Suchasna Informatsiyna Ukraina: Informatika, ekonomika, filosofiya: materiali dopovidey konferentsii, 26 kvitnya 2012 roku. – Donetsk, 2012. – 316 s. – S. 76-79.

8. Bilyk G.V. Metod pobudovi naykorotshih shlyahsv u dvorivnevomu grafi / G.V. BIlyk, I.S. Grunsky, N.V. Nogina // Informatsiyni upravlyayuchi sistemi ta kompyuterniy monitoring (IUS KM – 2013) : IV Vseukrainska naukovo-tehnichna konferentsiya studentiv, aspirantIv ta molodih vchenih, 24 – 25 kvitnya 2013 r., m. Donetsk : zb. dop. / Donets. natsional. tehn. un-t; redkol. V.A. Svitlichna. – Donetsk : DonNTU, 2013. – V 2 tt. – T. 1. – 765 s. – S. 474–478.
9. Bilyk G.V. Poshuk naykorotshih shlyahiv v grafi dvorivnevoji strukturi. / G.V. Bilyk, I.S. Grunsky, N.V. Nogina // Intelektualni sistemi v promislovosti i osviti : tezi dopovidey Chetvertoji mizhnarodnoji naukovo-praktichnoji konferentsiji. – Sumi : Vid-vo SumDU, 2013. – (u drutsi).

RESUME

A.V. Bilyk, I.S. Grunsky, N.V. Nogina

A Finding Shortest Path in a Two-level Graph

In this work we consider a well-known problem of finding shortest paths in graphs that has many practical applications. An important version when a graph has complicated two-level structure, namely vertices of a first-level graph are second-level graphs, is considered. These graphs are intensively studied with regard to logistics and path planning for mobile robots. The problem has the broad range of applications and thus generates many variants of labeled graphs. At present, this problem has not been solved completely.

Finite undirected connected graphs where vertices and edges are labeled with symbols (numbers) from a given set are considered. On the basis of these labels the labels of paths and their quality (length) are calculated. The goal of this work is to create a method for finding shortest paths in two-level graphs.

In this work a new technique for finding such paths is proposed. It enables to find one or several shortest paths between given vertices, labels and quality of these paths. Proposed method is based on the local reduction of vertices of a first-level graph starting from its final vertex and going to the initial vertex. When first-level vertex is reduced it is considered a second-level graph in which a construction of shortest paths is made on the basis of the local vertex reduction described above. Then the set of obtained shortest paths is substituted for second-level vertex and thus the vertex of the first-level graph is eliminated.

As a result of the application of the proposed method one or several paths of a double optimality are built: in the first-level graph as well as in all the second-level graphs.

Advantages of the method are:

1) a two-level graph permits to represent input data simpler then the standard one-level model;

2) an elimination of the whole second-level graph enables to speed up the search of shortest paths;

3) an introduction of useful operations on paths in graphs with complicated structure.

This work contains new results in solving the problem of finding shortest paths that are useful for other graph theory problems.

Стаття надійшла до редакції 11.12.2013.